

سب کثیرات الحدود بوليانیه - مجموعہ اجزائے اعدادی :

لكن بالنسبة لمجموعة من المتغيرات (الحروف أو الرموز) x_1, x_2, \dots, x_n
 يعني يكتب حدود بولياني E في هذه المتغيرات ويكتب $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 أي متغير آخر له تغير مكون من المتغيرات السابقة باستخدام بوليان
 على غير بوليه (+)
 على سبيل المثال :

$$F = (x'y'z' + y' + x'z)'$$

$$E = (x + y'z)' + (xy'z' + x'y')$$

أي تعابير بوليانيه في المتغيرات x, y, z
 الحرف هو متغير أو مقام متغير مثلاً x, x', y, y', z, z' يعني أي
 رتبة الحد
 يعني حاصل الضرب الأساسي حاصل ضرب حرفيه أو أكثر حيث لا يكون
 حرفان على نفس المتغير مثلاً :

$$x, xy, xy', xy'z, xy'z', x'y, x'y', x'y'z, x'y'z'$$

كلها حاصل ضرب أساسية
 $xyz = xyz, x'yz = x'yz, x'yz' = x'yz', x'yz' = x'yz'$
 أي كثير الحدود البولياني هو حاصل مجموع عبارات حاصل ضرب
 أساسية أي أنه بتعبير آخر
 أن أي حاصل ضرب بولياني يمكن اختزاله إلى حاصل ضرب
 أساسية :

يقال أن كثير حدود بولياني E في صورة مجموع حاصل ضرب أو صورة
 أقل حدود إذا كانت E حاصل ضرب أساسي أو مجموع اثنين أو أكثر
 من حاصل الضرب الأساسية مثلاً :

$$E = xz' + y'z + xy'z'$$

والخلاصة أن أي كثير حدود بولياني (تعبير بولياني) غير صفرية يمكن
 اختزاله في صورة مجموع عبارات بالطريقة التالية :

۱۔ باستخدام قوانین محدوديات و نظريات المنطق.

۲۔ باستخدام قوانين التوزيع في جبر بول.

۳۔ باستخدام قوانين هوان التبادلية - الامتصاص - الامتصاص يمكن تحويل كل حاصل ضرب في E الى حاصل ضرب اساسي مراعيا باستخدام قوانين الامتصاص يمكننا وضع E في صورة حاصل مجموع هوان ضرب.

مثال ۲: لتكن لدينا الدالة:

$$\begin{aligned} F &= (ab + c')(ac' + bc) \\ &= abc' + abc + ac' \\ &= ab + ac' \end{aligned}$$

* امتتن بقال انه كثيرة الحدود البولينية (غير الصورية) $E(x_1, \dots, x_n)$

في الصورة الكاملة (على شكل مجموع حد اداة قانونية).

كل حاصل ضرب يكون جمع المطويات كما ان كثيرة حدود بولينية (تغير بولينية) يمكن وضعها في الصورة الكاملة لمجموع هوان ضرب (على شكل مجموع حدودات قانونية) كما في المبرهنة التالية:

مبرهنة ۱:

ان اي تغير بوليني غير منفر $E(x_1, \dots, x_n)$ يمكن وضعه في الصورة الكاملة لمجموع هوان ضرب (شكل قانوني) وهذا التمثيل راسي.

مثال ۱:

اكتب كلاً من كثيرتي الحدود على شكل مجموع حدودات قانونية ثم استنتج انهما متساويتان:

$$E_1 = xy + y'z'$$

$$E_2 = xy + xz' + y'z'$$

الحل:

$$E_1 = xy(z + z') + y'z'(x + x')$$

$$= xyz + xyz' + xy'z' + x'y'z'$$

$$E_2 = xy(z + z') + xz'(y + y') + y'z'(x + x')$$

$$= xyz + xyz' + xy'z' + x'y'z'$$

المقابلة بين E_1 و E_2 نجد انهما متساويتان.

مثال 2:

اكتب كثير الحدود البوليني بالصورة الكاملة (مجموع الجداءات القانونية).

$$f = xy + xz + yz$$

$$= xy(z+z') + xz(y+y') + yz(x+x')$$

الحل:

مثال 3:

اكتب كثير الحدود الحصري لكل مجموع الجداءات القانونية.

$$F(x, y, z, u, v) = x'y'u$$

الحل:

$$= x'y'u(z+z')(v+v')$$

$$= (x'y'u'z + x'y'u'z')(v+v')$$

$$= (x'y'u'zv + x'y'u'z'v) + x'y'u'z'v + x'y'u'z'v'$$

ملاحظة مهمة:

يمكن تمثيل القايير كثيرات الحدود البولينية بكتابة على شكل مجموع جداءات قانونية بصورتي ارقام وذلك باستخدام عناصر B^n باعتبارها تمثيل النظام الثنائي لاعداد n في النظام العشري.

مثلاً:

اذا كانت لدينا F مكتوب على شكل صورة كاملة (مجموع الجداءات القانونية) ،

$$F = xyzw + xy'zw + x'y'zw + x'y'z'w + x'y'z'w'$$

العناصر B^n المقابلة لتلك التي في العبارة F هي

0000 , 0011 , 0101 , 1010 , 1100

في النظام الثنائي كما ان:

$$1100 = 12 , 1010 = 10 , 0101 = 5$$

$$0011 = 3 , 0000 = 0$$

ایک مثال:

$$F = \sum (0, 3, 5, 13, 14)$$

مثال: ایک کثیر الحدود البولياني عام شکل مجموع عبارات قانونی رقم
بجایۃ الاختصار

$$F(x, y, z, w) = \sum (1, 5, 13, 15)$$

الک:

$$1 = 0001$$

$$5 = 0101$$

$$13 = 1101$$

$$15 = 1111$$

$$F = \cdot x' y' z' w + x' y z' w + x y z' w + x y z w$$

مثال: اوصد استعمل القانونی بطريقة الجدول لکثیر الحدود البولياني

$$F(x, y) = x + x y'$$

$$2^2 = 4$$

الک:

← (11) صح و (10) خطأ و (00) خطأ و (01) خطأ
و انک انظر صيداً

	x	y	F	
	1	1	1	→ xy
	1	0	1	→ xy'
	0	1	0	→ 0
	0	0	0	→ 0
				→ F = xy + xy'

مثال: باستخدام طريقة الجدول اکثیر الحدود البولياني باستعمل
القانونی (اوصد استعمل القانونی باستخدام طريقة الجدول)

$$F = x + x' z' + x y' z'$$

$$2^3 = 8$$

الک:

X	Y	Z	F
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

$$\rightarrow xyz$$

$$\rightarrow x^+y^+z'$$

$$\rightarrow x^+y'z$$

$$\rightarrow x^+y'z'$$

$$\rightarrow x'y^+z'$$

$$\rightarrow x'y^+z$$

$$\rightarrow x'y'z'$$

$$\rightarrow x'y'z$$

$$\rightarrow x'y'z'$$

وبتاکہ:

$$F = xyz + xy^+z' + xy'z + xy'z' + x'y^+z' + x'y'z'$$

سسب تبیہ واختصار، لفظی لولیا لولیا (کثیرات الحد لولیا لولیا)۔

تعریف (1): لکھو F ، G کثیرات الحد لولیا لولیا متساویتین نقول
ان F میں G اور متضمرہ اکثریت G ، اذا الحقیقۃ احد، شرطیۃ التالین:

اذا كان عدد ذرات F اقل من عدد ذرات G في
اذا ان اول عدد ذرات F في كل من F و G فان عدد المتغيرات ومتمماتها
في F اقل من عدد المتغيرات ومتمماتها في G .

مثال:

$$F = pq + p'q'r$$

$$G = pqr + pqr' + p'q'r'$$

مساویان لکھو اب G ان اقل من عدد ذرات F .

$$F = p + q$$

$$G = p + p'q$$

مثال :

F و G هما دالتان بوليانيت

لكن F أبسطة أكثر من G .

تعريف 2 :

نقول أن عبارة كثيرة الحدود بوليانيت \mathbb{K} الصغرية إذا كان لا يوجد عبارة F بسيطة أكثر من G .

* طريقة مخططات كارنو هي اختصار وتبسيط كثيرات الحدود بوليانيت.

إن مخططات كارنو كطريقة تختصر التقابير وكثيرات الحدود البوليانيت مضمدة في الحالات التي يكون فيها عدد المتغيرات لا يتجاوز (4) متغيرات. أما إذا كان الهدف الأساسي هو إيجاد صيغة بسيطة للدالة البوليانيت فغالباً ثلاث طرائق لإيجاد ذلك وهي :

١- طريقة كوين مكدونلي

٢- طريقة الإجماع

٣- طريقة مخططات كارنو

إن كل هذه الطرق في الأساس يمكن استخدامها لتبسيط أي دالة بوليانيت. هناك عدد من المتغيرات ويمكن برمجتها باستخدام الحاسوب لتنفيذها إلا أنها صعبة الوصف. أما طريقة مخططات كارنو فهي سهلة الوصف للدالة بمتغيرات أو ثلاث متغيرات أو أربع متغيرات فهي موصوفة في هذا البند أولاً.

لا ستفهم مخططات كارنو (تبسيط الدالة البوليانيت) :

نكتب الدالة البوليانيت في شكل مجموع عبارات قانوني ثم نقوم بعمل رسم مخطط كارنو لكثرة الحدود بوليانيت التي عدد متغيرات n صيغة $n \leq 4$ وهذا المخطط هو عبارة عن جدول على شكل شبكة مكونة من "مربعات صغيرة".

سوال: مضامین

فایف خط کا رٹو یا فنڈ

اعطای کار و ملحقہ

∴ dL

محظوظ کا رنولتلات ستغرات

$$2^4 = 16$$

مثال ۲: خطاط کا رنوالہ ربع متغیرات

تعريفه

إذا كان r مستطلاً في ΔABC وكان قوله العا مائتا فتقول ان r
هو مستطال أصلي إذا كان r من أحد الأنواع الأربعة:

0A

وهو تخطيط الأسس ويكون أي فضاء إذا لم يوجد مستطيل أسس أي طوي
 وفيما يلي فوارزمية لاستخدام مخططات كارتون لكثرة حدود ذات أربعة
 متغير أو أكثر من أجل إيجاد العبارة الأصغرية تتبع مالمال
 (مقولة).

- ١- نطوئة كل واحد من زوايا المثلث بوجهه جواراً.
- ٢- نوجد كل واحد من جوار واحد آخر ونطوئة مع جواره الوحد.
- ٣- نوجد كل مستطيل مكون من أربعة مربعات متجاورة. ونطوئة المربعات
 الأربعة إذا كان مستطيلاً. هذه المربعات واحد على الآخر لم يطوئة بعد
 أو إذا كانت جميع مربعات المستطيل قد طوئة من قبل مع جواراً فلا
 حاجة لتطوئة المستطيل.
- ٤- كل مستطيل مكون من 8 مربعات تكون الواحد متجاورة ونطوئة
 مربعات هذا المستطيل إذا كانت من مربعات واحد على الآخر لم يطوئة
 بعد.

٥- نطوئة كل مربع مكون من الواحد بوجه مع أكبر مستطيل يمكن
 من 2 أو 4 أو 8 مربعات ينتمي إليه ذلك المربع ونوقف عندما
 يكون كل مربع مكون من الواحد من المخطط قد طوئة.

٦- لكل منطقة مطوئة نكتب جدار العظام المشتركة للزوايا
 المقابلة لمربعات هذه المنطقة ثم نأخذ المجموع البولياني لهذه الجدارات
 فنحصل على العبارة الأصغرية لكثرة الحدود وهي $MSP(F)$

مثال ١ باستخدام مخططات كارتون واحد العبارة الأصغرية لكثرة
 الحدود

$$F = xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$$

الحل

$$2^3 = 8$$

كثرة الحدود البوليانية مكتوب بصيغة الكسالة.

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x	1		1	1
x'	1	1		1

$$M_{Sp(F)} = \mathbb{Z} + X'y + xy$$

	rt	rt'	r't'	r't
pq		1	1	
p'q'			1	
p'q'			1	1
p'q	1			